

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе

А.А. Воронов

| | |
|----------------------------|--|
| | Рабочая программа дисциплины (модуля) |
| по дисциплине: | Многомерный анализ, интегралы и ряды |
| по направлению: | Экономика |
| профиль подготовки: | Управление инновациями в бизнесе Физтех-школа бизнеса высоких технологий кафедра высшей математики |
| курс: | 1 |
| квалификация: | бакалавр |

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 120 всего, в том числе:

лекции: 60 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 120 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 270, всего зач. ед.: 6

Количество контрольных работ, заданий: 3

Программу составили:

Г.Е. Иванов, д-р физ.-мат. наук, профессор

Л.Н. Знаменская, д-р физ.-мат. наук, доцент

М.В. Балашов, д-р физ.-мат. наук, доцент

А.Ю. Петрович, канд. физ.-мат. наук, доцент

В.В. Редкозубов, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 21.05.2020

Аннотация

Изучаются функции многих переменных. Понятие предела функции в точке, непрерывность функции в точке. Одним из основополагающих определений раздела является понятие дифференцируемости функции многих переменных в точке. Исследуются свойства функций, дифференцируемых в точке. Вводятся понятия частных производных, дифференциала и дифференциалов высших порядков для функций многих переменных. Заканчивается раздел изучением формулы Тейлора.

Вводятся понятия определенного интеграла и функции, интегрируемой на отрезке. Исследуются классы интегрируемых функций. Доказывается формула Ньютона-Лейбница.

Определяются несобственные интегралы. Изучаются сходящиеся и сходящиеся абсолютно несобственные интегралы (признаки и критерий).

Вводятся понятия числового ряда, сходящегося и абсолютно сходящегося ряда. Изучаются признаки и критерии сходимости знакоположительных рядов. Изучаются свойства абсолютно сходящихся числовых рядов.

Функциональные последовательности и функциональные ряды вводятся и изучаются параллельно. Определяются равномерно сходящиеся на множестве функциональные ряды (функциональные последовательности). Исследуются свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

Как частный случай функциональных рядов изучаются степенные ряды, в частности, ряды Тейлора.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

- формирование базовых знаний по математическому анализу для дальнейшего использования в других областях математического знания и дисциплинах с естественнонаучным содержанием;
- формирование математической культуры, исследовательских навыков и способности применять знания на практике.

Задачи дисциплины

- приобретение слушателями теоретических знаний и практических умений и навыков в области теории пределов, дифференциального и интегрального исчисления, теории рядов;
- подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;
- приобретение навыков в применении методов математического анализа в физике и других естественнонаучных дисциплинах.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

| Код и наименование компетенции | Индикаторы достижения компетенции |
|---|---|
| УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач | УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи |
| | УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи |
| УК-2 Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений | УК-2.1 Формулирует совокупность взаимосвязанных задач в рамках поставленной цели работы, обеспечивающих ее достижение. Определяет ожидаемые результаты решения поставленных задач |
| | УК-2.2 Проектирует решение конкретной задачи проекта, выбирая оптимальный способ ее решения, исходя из действующих правовых норм и имеющихся ресурсов и ограничений |
| ОПК-1 Способен применять знания (на промежуточном уровне) экономической теории при решении прикладных задач | ОПК-1.1 Применяет математический аппарат для решения типовых экономических задач |

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- свойства функций многих переменных, понятия предела, непрерывности, частных производных и дифференциала;
- свойства определенного интеграла Римана, несобственных интегралов, криволинейных интегралов, свойства числовых, функциональных и степенных рядов;
- признаки сходимости несобственных интегралов со степенными, логарифмическими и экспоненциальными особенностями; аналогичные признаки сходимости числовых и функциональных рядов;
- основные разложения элементарных функций в ряд Тейлора.

уметь:

- вычислять частные производные первого и высших порядков от функций многих переменных (в частности, заданных неявно); исследовать дифференцируемость функций;
- выполнять замену переменных в дифференциальных уравнениях (обыкновенных и с частными производными);
- вычислять определенные интегралы и криволинейные интегралы (в частности, возникающие в геометрических и физических задачах);
- исследовать сходимость числовых рядов, равномерную сходимость функциональных рядов;
- раскладывать элементарные функции в степенные ряды и находить их радиусы сходимости.

владеть:

- аппаратом дифференциального исчисления функций многих переменных, а также аппаратом интегрального исчисления для решения различных задач, возникающих в физике, технике, экономике и других прикладных дисциплинах;
- понятием равномерной сходимости функциональных рядов для обоснования некоторых математических преобразований, применяемых в физике.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

| № | Тема (раздел) дисциплины | Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час. | | | |
|-----------------------|---|---|----------|-----------------|----------------|
| | | Лекции | Семинары | Лаборат. работы | Самост. работа |
| 1 | Дифференциальное исчисление функций многих переменных | 13 | 14 | | 20 |
| 2 | Определенный интеграл, его применение | 11 | 3 | | 20 |
| 3 | Несобственный интеграл | 5 | 11 | | 20 |
| 4 | Числовые ряды | 5 | 4 | | 20 |
| 5 | Функциональные последовательности и ряды | 13 | 14 | | 20 |
| 6 | Степенные ряды | 13 | 14 | | 20 |
| Итого часов | | 60 | 60 | | 120 |
| Подготовка к экзамену | | 30 час. | | | |
| Общая трудоёмкость | | 270 час., 6 зач.ед. | | | |

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 2 (Весенний)

1. Дифференциальное исчисление функций многих переменных

1.1. Точечное n -мерное евклидово пространство. Расстояние между точками, его свойства. Предел последовательности точек в n -мерном евклидовом пространстве. Теорема Больцано-Вейерштрасса и критерий Коши сходимости последовательности. Внутренние, предельные, изолированные точки множества; точки прикосновения. Открытые и замкнутые множества, их свойства. Внутренность, замыкание и граница множества.

1.2. Предел числовой функции нескольких переменных. Определения по Гейне и Коши, их эквивалентность. Повторные пределы и пределы по направлениям. Исследование предела функции двух переменных при помощи перехода к полярным координатам. Предел функции по множеству.

1.3. Непрерывность функции нескольких переменных в точке и по множеству. Непрерывность сложной функции. Свойства функций, непрерывных на компакте – ограниченность, достижение точных верхней и нижней граней, равномерная непрерывность. Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной в области.

1.4. Частные производные функций нескольких переменных. Дифференцируемость функции нескольких переменных в точке, дифференциал. Необходимые условия дифференцируемости, достаточные условия дифференцируемости. Дифференцируемость сложной функции. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменных. Градиент, его независимость от выбора прямоугольной системы координат. Производная по направлению.

1.5. Частные производные высших порядков. Независимость смешанной частной производной от порядка дифференцирования. Дифференциалы высших порядков, отсутствие инвариантности их формы относительно замены переменных. Формула Тейлора для функций нескольких переменных с остаточным числом в формах Лагранжа и Пеано.

2. Определенный интеграл, его применение

2.1. Определенный интеграл Римана. Суммы Римана, суммы Дарбу, критерий интегрируемости. Интегрируемость непрерывной функции, интегрируемость монотонной функции, интегрируемость ограниченной функции с конечным числом точек разрыва. Свойства интегрируемых функций: аддитивность интеграла по отрезкам, линейность интеграла, интегрируемость произведения, интегрируемость модуля интегрируемой функции, интегрирование неравенств, теорема о среднем. Свойства интеграла с переменным верхним пределом – непрерывность, дифференцируемость. Формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование подстановкой и по частям в определенном интеграле.

2.3. Геометрические приложения определенного интеграла – площадь криволинейной трапеции, объем тела вращения, длина кривой, площадь поверхности вращения.

2.4. Криволинейный интеграл первого рода. Независимость выражения интеграла через параметризацию кривой от допустимой замены параметра. Ориентация гладкой кривой. Криволинейный интеграл второго рода, выражение через параметризацию кривой.

3. Несобственный интеграл

3.1. Несобственный интеграл (случай неограниченной функции и случай бесконечного предела интегрирования). Критерий Коши сходимости интеграла. Интегралы от знакопостоянных функций, признаки сравнения сходимости. Интегралы от знакопеременных функций; абсолютная и условная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля.

4. Числовые ряды

4.1. Числовые ряды. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные ряды: признаки сравнения сходимости, признаки Даламбера и Коши, интегральный признак. Знакопеременные ряды: абсолютная и условная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля. Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых. Теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда. Произведение абсолютно сходящихся рядов.

5. Функциональные последовательности и ряды

5.1. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Критерий Коши равномерной сходимости. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда их непрерывных функций. Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных рядов. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов. Признаки Дирихле и Абеля.

6. Степенные ряды

6.1. Степенные ряды с комплексными членами. Первая теорема Абеля. Круг и радиус сходимости. Характер сходимости степенного ряда в круге сходимости. Формула Коши-Адамара для радиуса сходимости. Вторая теорема Абеля. Непрерывность суммы комплексного степенного ряда.

6.2. Степенные ряды с действительными членами. Сохранение радиуса сходимости при почленном интегрировании и дифференцировании степенного ряда. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда в круге сходимости. Единственность разложения функции в степенной ряд; ряд Тейлора. Формула Тейлора с остаточным числом в интегральной форме. Пример бесконечно дифференцируемой функции, не разлагающейся в степенной ряд. Разложение в ряды Тейлора основных элементарных функций. Разложение в степенной ряд комплексной функции .

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Лекции по математическому анализу [Текст] : в 2 ч. : учеб. пособие для вузов. Ч. 1 / Г. Е. Иванов ; М-во образования и науки РФ, МФТИ .— 2-е изд., испр. — М. : Изд-во МФТИ, 2004 .— 359 с.
2. Курс математического анализа [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин .— 5-е изд. — М. : БИНОМ. Лаб. знаний, 2013 .— 672 с.
3. Сборник задач по математическому анализу [Текст] : в 3 т. Т. 1 : Предел. Непрерывность. Дифференцируемость / Л. Д. Кудрявцев [и др.] .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Физматлит, 2010, 2012 .— 496 с.
4. Сборник задач по математическому анализу [Текст] : в 3 т. Т. 2 : Интегралы. Ряды : учеб. пособие для вузов / Л. Д. Кудрявцев [и др.] .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Физматлит, 2003, 2009, 2012 .— 504 с.
5. Сборник задач по математическому анализу [Текст] : в 3 ч. Ч. 3 : Функции нескольких переменных : учеб. пособие для вузов / Л. Д. Кудрявцев [и др.] ; под ред Л. Д. Кудрявцева .— М. : Наука : Физматлит, 1995 .— 496 с.
6. Лекции по математическому анализу [Текст] : учебник для вузов / О. В. Бесов .— М. : Физматлит, 2014 .— 480 с.
7. Лекции по математическому анализу [Текст] : в 3 ч. Ч. 2 : учеб. пособие для вузов. Многомерный анализ, интегралы и ряды / А. Ю. Петрович ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т .— М. : МФТИ, 2012 .— 268 с.

Дополнительная литература

1. Курс математического анализа [Текст] : в 3т. : учебник для вузов:рек.М-вом образования РФ / Л. Д. Кудрявцев .— 5-е изд., перераб.и доп. — М. : Дрофа, 2004 .— .— (Высшее образование : Современный учебник).-Предм.-имен.указ.:с.706-713.-5000экз.-ISBN 5-7107-5003-4(в пер.) .— Т.2 : Ряды. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. - 2004. - 720 с.
2. Курс математического анализа [Текст] : в 2 т. : учебник для вузов : доп. М-вом образования СССР. Т. 1 / С. М. Никольский .— 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1983 .— 464 с.
3. Курс математического анализа [Текст] : в 2 т. : учебник для вузов : доп. М-вом образования СССР. Т. 2 / С. М. Никольский .— 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1983 .— 448 с.

4. Лекции по математическому анализу [Текст] : [в 2 ч.]. Ч. 1 : учеб. пособие для вузов : рек. УМО МФТИ / Г. Н. Яковлев .— М. : Физматлит, 2001 .— 400 с.

5. Курс дифференциального и интегрального исчисления [Текст] : 3 т. : учеб. пособие для вузов / Г. М. Фихтенгольц .— 8-е изд. — М. : Физматлит : Лаб. знаний, 2003 .— Т. 2. - 2003. - 864 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://www.math.mipt.ru>

<http://lib.mipt.ru>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Приведены в ежегодно разрабатываемых домашних заданиях.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Экономика
профиль подготовки: Управление инновациями в бизнесе
Физтех-школа бизнеса высоких технологий
кафедра высшей математики
курс: 1
квалификация: бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен

Разработчики:

Г.Е. Иванов, д-р физ.-мат. наук, профессор
Л.Н. Знаменская, д-р физ.-мат. наук, доцент
М.В. Балашов, д-р физ.-мат. наук, доцент
А.Ю. Петрович, канд. физ.-мат. наук, доцент
В.В. Редкозубов, канд. физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

| Код и наименование компетенции | Индикаторы достижения компетенции |
|---|---|
| УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач | УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи |
| | УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи |
| УК-2 Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений | УК-2.1 Формулирует совокупность взаимосвязанных задач в рамках поставленной цели работы, обеспечивающих ее достижение. Определяет ожидаемые результаты решения поставленных задач |
| | УК-2.2 Проектирует решение конкретной задачи проекта, выбирая оптимальный способ ее решения, исходя из действующих правовых норм и имеющихся ресурсов и ограничений |
| ОПК-1 Способен применять знания (на промежуточном уровне) экономической теории при решении прикладных задач | ОПК-1.1 Применяет математический аппарат для решения типовых экономических задач |

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Многомерный анализ, интегралы и ряды» обучающийся должен:

знать:

- свойства функций многих переменных, понятия предела, непрерывности, частных производных и дифференциала;
- свойства определенного интеграла Римана, несобственных интегралов, криволинейных интегралов, свойства числовых, функциональных и степенных рядов;
- признаки сходимости несобственных интегралов со степенными, логарифмическими и экспоненциальными особенностями; аналогичные признаки сходимости числовых и функциональных рядов;
- основные разложения элементарных функций в ряд Тейлора.

уметь:

- вычислять частные производные первого и высших порядков от функций многих переменных (в частности, заданных неявно); исследовать дифференцируемость функций;
- выполнять замену переменных в дифференциальных уравнениях (обыкновенных и с частными производными);
- вычислять определенные интегралы и криволинейные интегралы (в частности, возникающие в геометрических и физических задачах);
- исследовать сходимость числовых рядов, равномерную сходимость функциональных рядов;
- раскладывать элементарные функции в степенные ряды и находить их радиусы сходимости.

владеть:

- аппаратом дифференциального исчисления функций многих переменных, а также аппаратом интегрального исчисления для решения различных задач, возникающих в физике, технике, экономике и других прикладных дисциплинах;
- понятием равномерной сходимости функциональных рядов для обоснования некоторых математических преобразований, применяемых в физике.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль осуществляется на основе балльно-рейтинговой системы (БРС) оценки знаний по изучаемой дисциплине. БРС учитывает выполнение студентами совокупности домашних заданий и контрольных работ в соответствии с учебным планом. Данные о посещаемости и текущей успеваемости вносятся преподавателями в специальные журналы и учитываются в БРС.

Текущий контроль на основе домашних заданий осуществляется в течении учебного семестра в сроки, установленные Учебным управлением, в соответствии с учебным планом.

Для сдачи задания студент обязан предоставить решение задачи домашнего задания в письменной форме, ответить на вопросы преподавателя и написать контрольную работу по заданию, по которой проверяются знание понятий и утверждений по темам сдаваемого задания и умению решать задачи.

Во время выполнения контрольной работы нельзя пользоваться помощью других лиц, вычислительной техники и мобильными телефонами.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Письменный экзамен проводится по единой письменной экзаменационной работе для всех специальностей (4 варианта) в течение 4 часов. Оценка за письменный экзамен является частью общей оценки за предмет.

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется один час (астрономический) на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать двух часов.

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.

Балльно-рейтинговая система оценки знаний студентов

Дисциплина: «Многомерный анализ, интегралы и ряды», 1 курс, 2 семестр, экзамен

Кафедра: высшей математики

| № | Вид занятий | Сумма баллов |
|-----|---|----------------|
| 1. | Контрольная работа № 1 по сдаче 1 задания | 0 – 6 |
| 2. | Контрольная работа № 2 по сдаче 2 задания | 0 – 6 |
| 3. | Контрольная работа № 3 по сдаче 3 задания | 0 – 6 |
| 4. | Задание № 1 | 0 – 2 |
| 5. | Задание № 2 | 0 – 2 |
| 6. | Задание № 3 | 0 – 2 |
| 7. | Проверка теоретических знаний | 0 – 3 |
| 8. | Работа на семинарах | 0 – 3 |
| 9. | Письменная работа | 0 – 10 |
| 10. | Итоговый контроль. Экзамен (устный ответ) | 0 – 60 |
| | ИТОГО | 0 – 100 |

Сумма баллов за устный ответ начисляется по формуле $N \cdot 6$, где $N \geq 3$ – предварительная оценка за устный ответ по десятибалльной шкале. Если $N=1, 2$, то итоговая оценка совпадает с N .

Соответствие оценок итоговой академической успеваемости балльно-рейтинговой системы

| Баллы БРС | Оценки | |
|--------------|--------|---------------------|
| 96 – 100 | 10 | отлично |
| 91 – 95 | 9 | |
| 83 – 90 | 8 | |
| 75 – 82 | 7 | хорошо |
| 67 – 74 | 6 | |
| 59 – 66 | 5 | |
| 51 – 58 | 4 | удовлетворительно |
| 40 – 50 | 3 | |
| 28 – 39 | 2 | неудовлетворительно |
| 0 – 27 | 1 | |

Регламент принятия домашних заданий и проведения экзамена определяется «Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации студентов на кафедре высшей математики».

Задания по дисциплине «Многомерный анализ, интегралы и ряды»

1. Вычислите интеграл $\int x^2 \sqrt[5]{5x^3 + 1} dx$.
2. Вычислите интеграл $\int \sqrt{1 - x^2} \arcsin x dx$.
3. Вычислите интеграл $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{x^4 + x^3 + 2x^2} dx$.
4. Найдите все внутренние и граничные точки множества $([0; 1] \cap \mathbb{Q}) \cup \{2\}$.
5. Найдите в точке $(0;0)$ предел функции $f(x, y) = \frac{xy^2(x^2+y^2)}{1-\cos(x^2+y^2)}$.
6. При каких значениях α функция

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^\alpha \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$
 будет непрерывна в точке $(0;0)$?
7. Найдите частные производные и исследуйте на дифференцируемость в точке $(0,0)$ функцию

$$f(x, y) = y + \ln \left(3 + \sqrt[3]{x^2 y} \right).$$
8. Найдите первый дифференциал функции $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ в точке $(1;0;1)$.
9. Найдите длину дуги кривой $y = \frac{1}{2} (\ln \cos x + \ln \sin x)$, $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$.
10. При каких значениях α сходится интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} x - x - x \ln(1 + \frac{x^2}{6})}{(\operatorname{ch} x - \sqrt{1+x^2})(\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x})^\alpha} dx?$$
11. Исследуйте на условную и абсолютную сходимость при всех значениях параметра α интеграл

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha \sin x dx$$
12. Разложите функцию $f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2x^2}{\sqrt{9-4x^4}}$ по степеням x и найти радиус сходимости полученного ряда.
13. Исследуйте на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 + 2n} \right)^{n^2 + n + 5}.$$

14. Исследуйте на равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1; +\infty)$ функциональную последовательность

$$f_n(x) = \frac{n^2}{x} \sin \frac{x}{n^2} + \sin x$$

15. Исследуйте на равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; 1)$ и $E_2 = (1; +\infty)$ функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{e^x}{ne^{2x} + 1}.$$

Ключи к заданиям

1. $\frac{1}{18} \sqrt[5]{(5x^3 + 1)^6} + C.$
2. $\frac{\arcsin^2 x}{4} + \frac{1}{2} \arcsin x \cdot x \sqrt{1 - x^2} - \frac{x^2}{4} + C.$
3. $\frac{1}{4} \ln(x^4 + x^3 + 2x^2) - \frac{2}{x} - \frac{3}{2\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{7}} + C.$
4. Внутренних точек нет. Граничные $[0; 1] \cup \{2\}.$
5. 0.
6. $\alpha > 0.$
7. Недифференцируема, $f'_x(0,0) = 0, f'_y(0,0) = 1.$
8. $-\frac{1}{2} dz.$
9. $\frac{1}{2} \ln 3.$
10. $(3, 10).$
11. Сходится абсолютно при $\alpha < -1$, условно при $\alpha \in [-1; 0)$, расходится при $\alpha \in [0; +\infty).$
12. $f'(x) = -\frac{4}{3} x \left(1 - \frac{4}{9} x^4\right)^{-\frac{1}{2}};$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_{-\frac{1}{2}}^n \frac{(-1)^{n+1} 4^{n+1}}{(4n+2) 3^{2n+1}} x^{4n+2}; R = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$
13. Сходится по признаку Коши.
14. Предельная функция $f(x) = \sin x + 1.$ Сходится на E_1 равномерно и на E_2 неравномерно.
15. Сходится на E_2 равномерно и на E_1 неравномерно.